Série 8 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Matrice triangulaire, déterminant*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\mathbb{P} = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $p + q : (p + q)(t) = p(t) + q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha p : (\alpha p)(t) = \alpha\, p(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ muni des deux mêmes lois est un espace vectoriel.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\}$$

muni des deux mêmes lois ***n'est pas*** un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{S} = \{y = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ : \ \forall k \in \mathbb{Z}, y_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles sur $\mathbb{Z}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $w = y+z$: $w_k = y_k + z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha y$: $w_k = \alpha y_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que $\mathbb{S}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $f+g$: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, αf : $(\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que $\mathbb{F}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

f) On munit $\mathbb{F}$ des deux lois définies plus haut. Montrer que $\mathbb{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

g) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$, muni des deux mêmes lois, est un espace vectoriel.

h) On munit $C(\mathbb{R})$ de ces deux mêmes lois. Montrer que

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

Sol.:

Un espace vectoriel réel est un ensemble non vide V d'objets (appelés vecteurs) sur lesquels sont définies deux opérations : l'addition

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

et la multiplication par un scalaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha,u) & \mapsto & \alpha u. \end{array}$$

Ces deux opérations doivent satisfaire les propriétés suivantes pour tous $u, v, w \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$. **Attention** : l'ordre des axiomes peut différer d'un cours à l'autre. De plus on ne met pas dans cette liste les axiomes $u + v \in V$ (l'espace est fermé pour la loi d'addition) et $cv \in V$ (l'espace est fermé pour la loi de multiplication par scalaire). Ils doivent quand même être vérifiés en premier.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Il existe un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$
4. Il existe un élément zéro 0_V dans V tel que $u + 0_V = u$ pour tout u dans V
5. $c(u + v) = cu + cv$
6. $(c + d)u = cu + du$
7. $c(du) = (cd)u$
8. $1u = u$.

a) On doit tout d'abord vérifier que l'espace $\mathbb{P}$ est fermé pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire (i.e. ces opérations sont à valeurs dans $\mathbb{P}$). Pour l'addition, on considère deux polynômes p et q donnés par $(a_0 + a_1t + ...)$ et $(b_0 + b_1t + ...)$. Alors $(p + q)(t) = (a_0 + a_1t + ...) + (b_0 + b_1t + ...) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ...$ qui est de la même forme que p ou q et est donc un polynôme à coefficients réels. Le même raisonnement permet de conclure quant à l'autre loi.
On doit maintenant vérifier les 8 propriétés ci-dessus.
L'élément zéro de la propriété 4 est donné par le polynôme nul $p \equiv 0$ (c-à-d $p(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Les autres propriétés s'obtiennent de la même manière par calcul direct.

b) On vérifie d'abord que l'espace $\mathbb{P}_n$ est fermé pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire. Pour l'addition, on considère deux polynômes p et q donnés par $(a_0 + a_1t + ... + a_nt^n)$ et $(b_0 + b_1t + ... + b_nt^n)$. Alors

$$\begin{aligned}(p + q)(t) &= (a_0 + a_1t + ... + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + ... + b_nt^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n,\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme de degré $\leq n$. Même raisonnement pour l'autre loi.

On doit ensuite de nouveau montrer que les 8 propriétés ci-dessus sont vérifiées.
L'élément zéro de la propriété 4 est donné par le polynôme nul $p \equiv 0$. Les autres propriétés s'obtiennent de la même manière par calcul direct. À noter que $-p$ est défini par $-p(t) = (-1)p(t) = -a_0 - a_1 t - ... - a_n t^n$. À noter également qu'une autre manière de procéder aurait été de montrer que $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}$.

c) Il suffit de montrer qu'au moins l'une des 8 propriétés ci-dessus n'est pas vérifiée.
L'élément zéro devrait être le polynôme nul $p \equiv 0$, qui n'est pas un polynôme de degré 2, et donc n'appartient pas à l'espace, ce qui contredit la propriété 4.
Autre solution : on peut montrer que l'ensemble n'est pas fermé pour l'addition. On considère deux polynômes p et q de degré 2 donnés par $p(t) = (t + t^2)$, $q(t) = (t - t^2)$. On a

$$(p+q)(t) = \left(t + t^2\right) + \left(t - t^2\right) = 2t,$$

qui est un polynôme de degré 1 et non 2. Par conséquent il n'appartient pas à l'ensemble.

d) L'espace $\mathbb{S}$ est fermé pour les deux lois, en effet les objets $(..., y_{-2} + z_{-2}, y_{-1} + z_{-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, y_2 + z_2, ...)$ et $(..., \alpha y_{-2}, \alpha y_{-1}, \alpha y_0, \alpha y_1, \alpha y_2, ...)$ sont bien des suites réelles sur $\mathbb{Z}$.

On doit ensuite vérifier les 8 propriétés ci-dessus.
Le seul candidat possible comme suite nulle est le vecteur $0_{\mathbb{S}} = 0y = (..., 0, 0, 0, ...)$. On vérifie que

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{S}} + y = (..., 0 + y_{-2}, 0 + y_{-1}, 0 + y_0, 0 + y_1, 0 + y_2, ...) \\ = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = y. \end{aligned}$$

Le candidat à être l'opposé de y est $-y = (-1)y = (..., -y_{-1}, -y_0, -y_1, ...)$. On vérifie que $y + (-y) = ... = 0_{\mathbb{S}}$.

Les autres propriétés s'obtiennent immédiatement avec la même technique.

e) L'espace $\mathbb{F}$ est fermé pour les deux lois. En effet, $f + g$ et αf définissent bien des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On doit ensuite vérifier les 8 propriétés.
L'élément zéro est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$ (i.e. $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Les autres propriétés s'obtiennent immédiatement.

f) Un sous-ensemble H d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel si les propriétés suivantes sont vérifiées :
   i) Le vecteur nul de V est dans H.
   ii) H est fermé pour l'addition, c-à-d, pour tous u et v dans H, la somme $u + v$ est dans H.
   iii) H est fermé pour la multiplication par un scalaire, c-à-d, pour tous $u \in H$ et $c \in \mathbb{R}$, le vecteur cu est dans H.

D'abord, l'espace des fonctions polynomiales est un sous-ensemble de l'espace des fonctions. Ensuite, on doit vérifier la propriété i), les autres propriétés ii) et iii) ayant déjà été vérifiées en a). L'élément *zéro* de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$, qui peut être vue comme le polynôme nul, qui appartient bien à l'espace des polynômes.

g) Tout d'abord, par le cours d'analyse, on sait que la somme de deux fonctions continues est continue, de même pour le produit d'une fonction continue par un scalaire.
On doit ensuite vérifier les 8 propriétés. L'élément nul est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$ qui est bien continue, et les autres propriétés sont vérifiées de la même manière. On aurait pu, alternativement, montrer que $C(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

h) On doit encore vérifier les propriétés énoncées au f).

  i) Le vecteur nul de $C(\mathbb{R})$ est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$, qui est différentiable et est donc aussi dans $C^1(\mathbb{R})$.

  ii) On sait par le cours d'analyse que la somme de deux fonctions de $C^1(\mathbb{R})$ est encore dans $C^1(\mathbb{R})$.

  iii) De même pour la multiplication par un scalaire.

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

  (i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

  (ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Sol.:

a) i) Oui. En effet,

$x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) = x_1(1 - t^2) + x_2t^2 + x_3t = t^2(x_2 - x_1) + x_3t + x_1 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

  ii) Oui

b) Non, aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3. Par exemple t^3 n'est pas une combinaison linéaire de p_1, p_2 et p_3. Plus tard on verra que $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ et il y a seulement trois vecteurs, donc ça ne peut pas être une base.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

Sol.: On note $A = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4)$, avec $(\overrightarrow{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ colonnes de A. Les vecteurs $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$ sont proportionnels à $\overrightarrow{v}_1$, donc ils sont superflus pour trouver une base de $\mathrm{Im}(A)$. Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_4$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de $\mathrm{Im}(A)$.

L'espace $\mathrm{Ker}(A)$ est constitué des vecteurs $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tels que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On a

$$A\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + x_3\overrightarrow{v}_3 + x_4\overrightarrow{v}_4 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\overrightarrow{v}_1 + x_4\overrightarrow{v}_4,$$

ainsi $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ssi $x_4 = 0$ et $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Par conséquent, x_2 et x_3 sont des variables libres du système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On obtient une base de $\mathrm{Ker}(A)$ en choisissant successivement $x_2 = 1$,

$x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$, $x_3 = 1$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 4

a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \text{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ où $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

c) Agrandir l'ensemble $\{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Sol.:

a) Deux. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sont linéairement indépendants, donc la dimension est au moins deux. Elle est inférieure ou égale à 2 car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

b) $B = \{\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ — c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (Note : $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_3\}$ et $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ sont aussi possibles).

c) L'espace W est de dimension deux, donc n'importe quel vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient. Par exemple, on peut proposer la base $\{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1\}$ de W.

Exercice 5

Soit $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Sol.:

a) $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

b) On vient en fait de calculer au (i) que Span $\{A, B, C\}$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, il suffit de trouver une matrice D qui n'est pas dans ce sous-espace, c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a \neq c + d$. On peut donc proposer par exemple $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.

Méthode alternative :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + d\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi, A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$.

Exercice 6

a) On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3)$ donnée par $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) Les coordonnées cherchées sont (c_1, c_2) avec $\overrightarrow{v} = c_1 \overrightarrow{b}_1 + c_2 \overrightarrow{b}_2$:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, on trouve $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

b) On résout $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}$ et on obtient $c_1 = -1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\, A \;\; \overrightarrow{b} \,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ soit compatible ?

Sol.:

a) Les colonnes 1, 2 et 4 forment une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{rg}(A) = 3$. Par le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Ker}\, A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \mathrm{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

b) $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A) = 3$.

$$\dim \mathrm{Ker}\, A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \mathrm{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

c) A est équivalente à la matrice identité de taille 7×7, ainsi $\mathrm{rg}(A) = 7$ et $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$.

d) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Col}\, A$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}([\, A \;\; \overrightarrow{b} \,])$.

Exercice 8

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.

b) Calculer $\mathrm{rang}(A)$, $\dim(\mathrm{Ker} A)$, $\mathrm{rang}(B)$, $\dim(\mathrm{Ker} B)$.

c) Trouver une base de $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Ker} B$.

Sol.:

a) En échelonnant/réduisant la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient la matrice B.

b) La matrice B est sous forme échelonnée réduite, on peut donc lire $\mathrm{rang}(B) = 3$ (trois pivots) et $\dim \mathrm{Ker} B = 1$. Comme A et B sont équivalentes d'après a), on a $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = 3$ et $\dim \mathrm{Ker} A = \dim \mathrm{Ker} B = 1$.

c) Comme B est la forme échelonnée réduite de A, on a $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} B$, et une base de $\mathrm{Ker} B$ est aussi une base de $\mathrm{Ker} A$. $\mathrm{Ker} B$ est l'espace des solutions de $B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, de dimension 1. On obtient ainsi la base $\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 9

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base standard). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Les coordonnées $[x]_{\mathcal{B}}$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de l'écriture de x comme combinaison linéaire des vecteurs de base b_1, b_2 et b_3.

Par conséquent, nous avons ici $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que

$$\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{b}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on nous donne $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base standard, et il s'agit de trouver les coordonnées de $\overrightarrow{y}$ par rapport à la nouvelle base $\mathcal{B}$. C'est le calcul inverse du précédent. On cherche des nombres réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{b}_1 + b\overrightarrow{b}_2 + c\overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{y}$. Pour trouver a, b et c il suffit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Le résultat est $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Sol.: On échelonne la matrice constituée des vecteurs colonnes $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ et $\overrightarrow{v}_4$. On trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes-pivot nous indiquent que les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_4$ sont des vecteurs de base de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4)$. Autrement dit le vecteur $\overrightarrow{v}_3$ est combinaison linéaire des autres vecteurs puisque c'est visiblement le cas de la troisième colonne de la matrice échelonnée d'être combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice échelonnée. Une autre base est donnée par la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puisque les vecteurs données engendrent $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel. ☐ ☐
b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V. ☐ ☐
c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$. ☐ ☐
d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel. ☐ ☐

Sol.:

a) Vrai. Les vérifications des axiomes d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel sont immédiates dans ce cas.
b) Faux. Par exemple $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ bien que $0 \in \mathbb{Z}$.
c) Vrai. Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = n$ et donc, par le théorème du rang, si et seulement si $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$. Ceci est équivalent à dire $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
d) Faux. Le noyau d'une matrice est *toujours* un espace vectoriel.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐
b) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est surjective. ☐ ☐
c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$. ☐ ☐
d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. En effet le vecteur $\overrightarrow{0}$ n'appartient pas à ce plan.
b) Faux. Par exemple à $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ matrice de taille 2×1 de noyau nul, correspond l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $x \mapsto (x, 0)$, qui n'est pas surjective.
c) Vrai. En effet on a $u + (-u) = 0$ et supposons que $u + w = 0_V = w + u$. Alors $w = w + 0_V = w + (u + (-u)) = (w + u) + (-u) = 0_V + (-u) = -u$. De plus $u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0_V$ donc $-u = (-1)u$.
d) Vrai. Par définition $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ (car la matrice possède n colonnes) et donc il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés de sous-espace vectoriel sont rapidement vérifiées.

<u>**Exercices additionnels**</u>

Exercice 13

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, on définit l'intervalle ouvert $I = (a, b)$, et les ensembles $C(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue}\}$ et $C^1(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f' \text{ est continue}\}$.

a) Vérifier que $C(I)$ et $C^1(I)$ sont des espaces vectoriels.

b) Montrer que la transformation $T : C(I) \to C^1(I)$ donnée par $T(f)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in I$, est bien définie et linéaire.

Sol.:

a) Il suffit de montrer que $C(I)$ et $C^1(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Le vecteur nul est bien dans ces deux espaces : la fonction nulle est continue et continûment différentiable. On utilise ensuite le fait que la somme de deux fonctions continues est continue, et le produit par un scalaire d'une fonction continue est encore continu. De même pour des fonctions continûment différentiables.

b) On doit montrer que si $f \in C(I)$, alors $g : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est différentiable pour $a < x < b$ avec g' continue. En effet, en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral, $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x)$, et g' existe et est continue, d'où $g \in C^1(I)$.

   Pour montrer $T(\alpha f) = \alpha T(f)$ et $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$, on utilise les propriétés de linéarité de l'intégration.

Exercice 14

Soit B une matrice sous forme échelonnée.

a) Montrer que les colonnes de B qui ont une position pivot (c.-à-d. les colonnes pivots) sont linéairement indépendantes.

b) Montrer que les colonnes de B qui n'ont pas de position pivot sont combinaison linéaire des colonnes pivots.

Sol.:

a) Soient $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k$ les colonnes pivots de la matrice B (dans l'ordre de gauche à droite). Soit C la matrice $(\vec{c}_1 \ldots \vec{c}_k)$. Toutes les colonnes de C sont des colonnes pivots. C a donc k pivots et k colonnes, l'équation $C\vec{x} = \vec{0}$ n'a donc pas de variables libres et n'a comme solution que la solution triviale $\vec{0}$. On sait alors que les colonnes de C sont linéairement indépendantes.

   Méthode alternative : On montre par récurrence sur k que si une matrice échelonnée possède au moins k colonnes pivots, alors ces k colonnes pivots sont linéairement indépendantes. Si $k = 0$, il n'y a rien à montrer et le résultat est vrai. On suppose le résultat vrai pour un certain k. On suppose que B possède $k+1$ colonnes pivots $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k, \vec{c}_{k+1}$. On considère la matrice B privée de la colonne pivot $\vec{c}_{k+1}$ la plus à droite. Par hypothèse de récurrence, les k premières colonnes pivots $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k$ sont linéairement indépendantes. Comme la matrice B est échelonnée, on remarque que la ligne de B contenant le pivot de la colonne $\vec{c}_{k+1}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

   où p est le pivot. Comme $p \neq 0$, la colonne pivot $\vec{c}_{k+1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k$. Ainsi les colonnes $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{k+1}$ sont linéairement indépendantes, ce qui achève la preuve par récurrence.

b) Soient $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k$ les colonnes pivots de la matrice B (dans l'ordre de gauche à droite) et soit $\vec{c}_0$ une colonne sans pivot. On considère le système linéaire

$$\vec{c}_0 = \lambda_1 \vec{c}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{c}_k$$

d'inconnus les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \cdots & \vec{c}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \vec{c}_0.$$

Comme la matrice B est échelonnée, on obtient que la matrice augmentée de ce système linéaire est échelonnée avec un pivot dans chaque ligne non nulle. Il possède donc une solution (unique), et $\vec{c}_0$ est bien combinaison linéaire des colonnes pivots de la matrice B.

Exercice 15

Soit $B = (1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t)$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) Déterminer la matrice de passage de la base B vers la base canonique $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$.

c) Écrire $t \mapsto t^2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Sol.:

a) Écrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B dans la base canonique de $\mathbb{P}_2$, $(1, t, t^2)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice de déterminant 1 est inversible. Les trois vecteurs de B sont donc linéairement indépendants, et la dimension de $\mathbb{P}_2$ est 3. Par conséquent, B est une base de $\mathbb{P}_2$. La matrice P est en fait la matrice de passage de la base B vers la base canonique.

b) La matrice P du a).

c) Les coordonnées de $t \mapsto t^2$ dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par définition de la matrice de passage P du b), les coordonnées de $t \mapsto t^2$ dans la base B sont donc la solution du système

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout : $x = 3, y = -2, z = 1$.

Exercice 16

Montrer que la dimension de $\mathbb{P}$ (espace des polynômes à coefficients réels) est infinie.

Sol.: Méthode 1 : L'espace $\mathbb{P}$ contient le sous-espace $\mathbb{P}_n$ de dimension n pour tout n. Par conséquent, la dimension de $\mathbb{P}$ est plus grande ou égale à n pour tout n donc infinie.

Méthode 2 : Supposons par l'absurde que la dimension de $\mathbb{P}$ soit finie, égale à n. Il existe une base $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$. Soit $M = \max_{i=1,\cdots,n} deg(p_i)$ le maximum des degrés des polynômes de cette base. On constate que le polynôme t^{M+1} n'est pas une combinaison linéaire des $p_1, \cdots, p_n$, ainsi $t^{M+1} \notin \mathbb{P}$ d'où la contradiction.

Exercice 17

Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ou linéairement dépendantes ?
2. Les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

Sol.: Les colonnes d'une matrice sont linéairement indépendantes si et seulement si une forme échelonnée de la matrice possède un pivot dans chaque colonne.

Les colonnes d'une matrice $m \times n$ engendrent $\mathbb{R}^m$ si et seulement si une forme échelonnée de la matrice possède un pivot dans chaque ligne.

On calcule une forme échelonnée des matrices A, B et C, puis on en déduit que

a) les colonnes de A sont linéairement indépendantes et n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$,
b) les colonnes de B sont linéairement dépendantes et n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$,
c) les colonnes de C sont linéairement dépendantes et engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sol.: Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans l'espace engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ s'il s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs, c'est-à-dire s'il existe x_1 et x_2 tel que

$$x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}$$

Ceci est vrai si et seulement si le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ admet au moins une solution, où A est une matrice qui a pour colonnes les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$. La matrice augmentée du système est donc

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Lorsqu'on échelonne la matrice augmentée, on constate qu'il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne : le système est compatible. Donc le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans l'espace engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$.

Exercice 19

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$.

1. Décrire tous les sous-espaces de $\mathbb{P}_2$ (en fonction du nombre d'éléments de leurs bases).
2. Calculer le vecteur de coordonnées du polynôme $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$ dans la base $\mathcal{F} = (1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2)$.

La partie 1. vous propose de réfléchir aux sous-espaces de polynômes de façon géométrique : pensez-y quelques instants et puis lisez la solution.

Sol.: Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$.

1. Nous nous trouvons dans un un espace vectoriel de dimension 3. Il y a donc des sous-espaces de dimension zéro, 1, 2 et 3. Nous savons que le seul sous-espace de dimension zéro est formé par le seul polynôme nul $\{0\}$. De même le seul sous-espace de dimension 3 est $\mathbb{P}_2$ tout entier.

   Les sous-espaces de dimension 1 sont de la forme $\text{Vect}\{p\}$ pour un polynôme non nul p. Il s'agit donc d'une "droite" formée de tous les multiples scalaires de p. Les sous-espaces de dimension 2 sont de la forme $\text{Vect}\{p, q\}$ pour deux polynômes non proportionnels p et q. Il s'agit donc d'un "plan" formé de toutes les combinaisons linéaires $\alpha p + \beta q$.
2. Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de la base $\mathcal{F}$ dans la base canonique. La matrice P est la matrice de changement de cordonnées de la base $\mathcal{F}$ vers la base canonique $\mathcal{C}an$.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   On cherche les composantes de $1 + 4t + 7t^2$ dans cette base, donc on doit résoudre le système $P(f)_{\mathcal{F}} = (f)_{\mathcal{C}an}$, où $(f)_{\mathcal{C}an}$ est le vecteur des coordonnées de $1 + 4t + 7t^2$ dans la base canonique :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$
   La solution de ce système est donnée par $(f)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :
$$\mathcal{F} = (1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3).$$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.
b) Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Sol.: Pour montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ il suffit de se rendre compte que nous avons exactement un polynôme de chaque degré compris entre 0 et 3. En effet, dans la base canonique $(1, t, t^2, t^3)$ les coordonnées des polynômes de Hermite sont $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-12\\0\\8\end{pmatrix}$.

La matrice obtenue en plaçant ces vecteurs de coordonnées dans les colonnes est déjà échelonnée ! On voit que cette matrice est inversible ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est une base.

Pour calculer le vecteur de coordonnées de $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$ dans la base $\mathcal{F}$, il suffit de résoudre le système

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 2 & 0 & -12\\0 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-12\\-8\\12\end{pmatrix} \quad \text{On trouve } [y(t)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\\3/2\end{pmatrix}$$

Exercice 21

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix}a - 3b + 6c\\5a + 4d\\b - 2c - d\\5d\end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Sol.: Par construction, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini comme $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ avec

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\5\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}6\\0\\-2\\0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix}0\\4\\-1\\5\end{bmatrix}.$$

On voit que $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_2$, ce qui est équivalent à dire que $H = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$. En vérifiant que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants (en calculant la forme échelonnée de la matrice dont les colonnes sont $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ par exemple), on peut déduire que H est de dimension 3.

Exercice 22

Soient

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -5/2\\-3 & -2 & 4\\2 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Déterminer si $\vec{w}$ est dans $\text{Im}A$, dans $\text{Ker}A$ ou bien dans les deux.

Sol.: Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans Ker$A$ car on calcule $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est aussi dans ImA car le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$.